Lista de Exercícios

Funções de várias variáveis, limites e continuidade

1. Encontre o domínio e imagem das funções. Descreva as curvas de nível da função e encontre a fronteira do domínio. Determine se o domínio é uma região aberta, uma região fechada ou nenhuma das duas.Decida se o domínio é limitado ou não limitado:

a) $f(x,y) = y - x$
b) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$
c) $f(x,y) = xy$
d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$
e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
f) $f(x,y) = \arcsin(y - x)$

2. Apresente os valores das funções de duas maneiras: esboçando a superfície $z = f(x,y)$ e desenhando várias curvas de nível no domínio da função. Identifique cada curva de nível com o seu respectivo valor da função.

a) $f(x,y) = y^2$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$
c) $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$
d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$
e) $f(x,y) = 1 - |y|$

3. Encontre uma equação para a curva de nível da função $f(x,y)$ que passa pelo ponto dado.

a) $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2,$ $\quad (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
b) $f(x,y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,dt,$ $\quad \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

4. Esboce uma superfície de nível típica para a função.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
b) $f(x,y,z) = x + z$
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$
d) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

5. Encontre uma equação para a superfície de nível da função que passa pelo ponto dado.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x - y} - \ln(z),$ $\quad (3, -1, 1)$
b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y + z^2),$ $\quad (-1, 2, 1)$

6. Encontre os limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \sec x \tan y$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2+y^2}{x+y+1}\right)$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos\left(\sqrt[3]{|xy|-1}\right)$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} \frac{\cos(y+1)}{y-\sin x}$

7. Encontre os limites reescrevendo primeiros as frações.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$, $x \neq y$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$, $x \neq y$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$, $x \neq 1$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$, $y \neq -4, x \neq x^2$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, $x \neq y$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$, $x+y \neq 4$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$, $2x-y \neq 4$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$, $x \neq y+1$

8. Encontre os limites:

a) $\lim\limits_{P\to(1,3,4)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

b) $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \left(\frac{2xy+yz}{x^2+z^2}\right)$

c) $\lim\limits_{P\to(3,3,0)} (\sin^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z)$

d) $\lim\limits_{P\to\left(-\frac{1}{4},\frac{\pi}{2},2\right)} \arctan(xyz)$

e) $\lim\limits_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos(2x)$

f) $\lim\limits_{P\to(0,-2,0)} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

9. Em que pontos (x, y) no plano as funções são contínuas?

a) $f(x, y) = \sin(x + y)$ e $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ e $f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$

c) $g(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ e $g(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos x}$

d) $g(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ e $g(x, y) = \frac{1}{x^2-y}$

10. Em que pontos (x, y, z) no espaço as funções são contínuas?

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ e $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

b) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$ e $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$

c) $h(x, y, z) = xy \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ e $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2+z^2-1}$

d) $h(x, y, z) = \frac{1}{|y|+|z|}$ e $h(x, y, z) = \frac{1}{|xy|+|z|}$

11. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que as funções não têm limite quando $(x, y) \to (0, 0)$.

a) $f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$

c) $f(x, y) = \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

d) $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$

e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

f) $g(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

g) $h(x, y) = \frac{x^2+y}{y}$

h) $h(x, y) = \frac{x^2}{x^2-y}$

12. Encontre o limite de f quando $(x, y) \to (0, 0)$ ou mostre que o limite não existe.

a) $f(x, y) = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$